RUSSELLS PARADOX

av

Per Helders

Stockholms universitet ht-98

Redovisning inom Logik, grundkurs (matematikens grundvalar, 5 poäng)

Handledare: Per-Erik Malmnäs

INNEHÅLL

1. Russells paradox 1

2. Vad är en paradox? 3

3. Russell 4

4. Wittgenstein 9

5. Den dolda motsägelsen 10

6. Sammanfattning 14

7. Slutsatser 16

Litteratur 19

1. Russells paradox

Bertrand Russell (1872-1970) formulerade år 1902 i ett brev till Frege en paradox som tycktes leda till slutsatsen att Cantors definition av vad som är en mängd inte kan vara riktig eller åtminstone inte fullständig. Cantor tänkte sig att vilka entiteter som helst utan restriktioner kan sammanföras till en mängd, även mängder. Frege hade i sina arbeten med att formulera matematikens grundvalar anslutit sig till denna uppfattning om vad som är en mängd och explicit uttryckt den i *Grundgesetze der Arithmetik* (1893). Det var inte bara Cantor och Frege som hade denna syn på mängdbegreppet, utan det var en uppfattning som var allmän bland matematikerna i slutet av 1800-talet.

Paradoxen i fråga kallas *Russells paradox*. I uppsatsen *Mathematical Knowledge as Based on the Theory of Types* (1908) presenterar Russell paradoxen tillsammans med ett antal andra paradoxer av samma typ. Russells formulering av den rent mängdteoretiska varianten av paradoxen (hädanefter Russells paradox) lyder där på följande vis (sid 59, hädanefter 'citat 1'):

> Let *w* be the class of all those classes which are not members of themselves. Then, whatever class *x* may be, '*x* is a *w*' is equivalent to '*x* is not an *x*'. Hence, giving to *x* the value *w*, '*w* is a *w*' is equivalent to '*w* is not a *w*'.

Russell kommenterar denna motsägelse på sid 62 (hädanefter 'citat 2'):

> In this case, the class *w* is defined by reference to 'all classes', and then turns out to be one among classes. If we seek help by deciding that no class is a member of itself, then *w* becomes the class of all classes, and we have to decide that this is not a member of itself, i.e., is not a class. This is only possible if there is no such thing as the class of all classes in the sense required by the paradox. That there is no such class results from the fact that, if we suppose there is, the supposition immediately gives rise (as in the above contradiction) to new classes lying outside the supposed total of all classes.

I detta sammanhang presenterar han som sagt också ett antal andra paradoxer av samma slag, dvs av det slag som vi brukar kalla de logiska, syntaktiska eller mängdteoretiska paradoxerna (däribland Burali-Fortis paradox och lögnarparadoxen). Han konstaterar att de alla är besläktade och att det krävs samma åtgärd för allihop för att de ska undvikas. Denna åtgärd består av Russells typteori. Denna teori går i korta drag ut på att mängden av alla mängder är av en annan typ än de mängder den består av, och att det således är otillåtet att tala om 'mängden av alla mängder', eftersom denna sats i enlighet med ovanstående citat inte visar typskillnaden, utan istället utökar totaliteten av alla mängder med ytterligare en, vilket genererar en motsägelse. I avsnitt 3 nedan behandlas Russells typteori och hans lösning av paradoxen mer utförligt.

Ludwig Wittgenstein tar upp Russells behandling av detta problem i *Tractatus Logico-Philosophicus* (1921). Wittgenstein skriver:

> 3.33 I den logiska syntaxen får ett teckens betydelse aldrig spela någon roll. Syntaxen måste kunna framställas utan att det blir tal om ett teckens *betydelse*, det får *enbart* förutsätta beskrivningen av uttrycken.
>
> 3.331 Efter denna anmärkning kastar vi en blick på Russells "typteori": Russells misstag visar sig i att han måste tala om tecknens betydelse vid formuleringen av teckenreglerna.
>
> 3.332 Ingen sats kan utsäga något om sig själv, eftersom satstecknet icke kan vara en beståndsdel av sig självt (detta är hela "typteorin").
>
> 3.333 En funktion kan icke vara sitt eget argument av det skälet, att funktionstecknet redan innehåller en urbild av argumentet och icke kan innehålla sig självt. Låt oss nämligen anta, att funktionen $F(fx)$ kunde vara sitt eget argument. I så fall funnes det alltså en sats: "$F(F(fx))$" och i denna måste den yttre funktionen F och den inre funktionen F ha skilda betydelser, ty den inre har formen $\varphi(fx)$, den yttre formen $\psi(\varphi(fx))$. Gemensamt för de bägge funktionerna är endast bokstaven F, som emellertid i och för sig icke betecknar någonting.
> Detta blir genast klart, om vi i stället för "$F(F(fu))$" skriver "$(\exists\varphi):F(\varphi u).\varphi u=Fu$". Härmed försvinner Russells paradox.
>
> 3.334 Den logiska syntaxens regler måste ge sig själva så snart man blott vet hur varje tecken betecknar.

Vid en första anblick tycks Wittgenstein mena att Russells typteori är överflödig. Detta intryck förstärks vid läsning av annat Wittgenstein skrivit, t ex i ett brev till Russell (*Letters to Russell, Keynes and Moore*, 1913) sid 19:

> Every theory of types must be rendered superflouos by a proper theory of the symbolism...

Han tycks mena att Russells paradox uppstår pga av att vi tror att F i den yttre funktionen och F i den inre funktionen i uttrycket $F(F(fx))$ (från *Tractatus* 3.333) betyder samma sak när det själva verket är omöjligt att de skulle kunna göra det. (Wittgenstein uttrycker sig i termer av funktion och argument i stället för mängd och element; relationen mängd - element är ett fall av den relation som generellt betecknas med de språkliga entiteterna funktion - argument. Detta mer generella uttryckssätt används också av Russell på flera ställen i *Mathematical Knowledge as Based on the Theory of Types*). I avsnitt 4 nedan ska vi precisera vari Wittgensteins kritik av Russell består och i vilken mån Wittgenstein levererar en annan lösning av problematiken kring de mängdteoretiska paradoxerna.

2. Vad är en paradox?

Innan vi går in på Russell och Wittgenstein ska vi säga något allmänt om paradoxer. Detta för att ha dels en tydlig bakgrund mot vilken fortsatta undersökningar ska göras, dels en metod vid dessa undersökningar. Vi definierar:

En paradox = Ett argument i vilket till synes giltiga premisser leder till en slutsats som innehåller en logisk kontradiktion.

Högra ledet i denna identitetsutsaga kan a priori omformuleras så att definitionen lyder:

En paradox = Ett argument som innehåller (minst) en motsägelse i premisserna och pga detta en motsägelse i slutsatsen.

Den motsägelse som finns i premisserna är naturligtvis dold, annars skulle vi inte uppleva resonemanget som paradoxalt. Anledningen till att den är dold är att inte alla premisser som är relevanta i argumentet är explicita. Det som intresserar oss är att synliggöra denna dolda motsägelse. När vi ser den uppfattar vi inte längre resonemanget som paradoxalt. Paradoxen upplöses. Vi kan i det aktuella fallet med Russells paradox formulera vårt sökande efter den dolda motsägelsen som följande fråga som vi hädanefter kallar fråga X:

Exakt vad i citat 1 ovan är det som är den direkta orsaken till den synliga motsägelse Russell visar oss?

Ställandet av denna fråga och undersökandet av olika tänkbara svar på densamma är den metod som ska begagnas för att uppnå syftet med föreliggande uppsats, och detta syfte är att:

- klargöra vad Russell menar att paradoxen orsakas av.
- klargöra vad Wittgenstein menar att paradoxen orsakas av.
- kritisera Russells och Wittgensteins lösningar.
- försöka leverera ytterligare svar på vad paradoxen orsakas av.

3. Russell.

I sammandrag kan man säga att Russell resonerar på följande vis: Satsen "mängden av alla mängder som inte är medlemmar i sig själva" måste klargöras. Ingår den åsyftade mängden i sig själv (i egenskap av att vara en instans av den åsyftade mängden av element)? Eftersom resultatet blir paradoxalt oavsett om man svarar ja eller nej på denna fråga (se citat 2 ovan) drar Russell slutsatsen att frågan är paradoxal i sig. Detta torde de flesta vara överens om, men i fråga om vad det är i denna fråga som är motsägelsefullt råder delade meningar. Russells svar utgår från hans typteori. Enligt denna kan alla entiteter sägas vara organiserade efter ett hierarkiskt system i vilket individuella objekt befinner sig längst ner. En mängd vars element utgörs av individuella objekt befinner sig som entitet betraktat inte på samma ontologiska nivå som objekten. Den är inte av samma *typ*, utan av en högre typ. Detsamma gäller för funktioner och argument. Funktioner befinner sig på nivån över sina argument, och en funktion G(x) vars argument utgörs av en annan funktion F(x) (dvs G(F(x))) är av en högre typ än denna andra funktion F(x) etc. Russell menar att när vi talar om *alla* mängder i satsen 'mängden av alla mängder', så kan vi med 'alla mängder' bara syfta på alla mängder av en viss typ. Vi måste alltså 'hålla reda på' vilken typ av mängder vi pratar om, eller rättare sagt hålla reda på till vilken typ den mängder vi pratar om hör. På sid 88 skriver Russell (hädanefter 'citat 3'):

> Again, consider the classes which are not members of themselves. *It is plain that, since we have identified classes with functions, no class can be significantly said to be or not to be a member of itself; for the members of a class are arguments to it, and arguments of a function are always of lower type than the function.* And if we ask: 'But how about the class of all classes? Is not that a class, and so a member of itself?', the answer is twofold. First, if 'the class of all classes' means 'the class of all classes of whatever type', then there is no such notion. Secondly, if 'the class of all classes' means 'the class of all classes of type *t*', then this is a class of the next type above *t*, and *is therefore again not a member of itself.* (mina kursiveringar).

Mot bakgrund av detta ska vi nu till Russell ställa vår fråga X: Exakt vad i citat 1 är orsaken till den synliga motsägelsen?

Russell torde i enlighet med ovanstående svara: Orsaken är att satsen 'Let *w* be the class of all those classes which are not members of themselves' genom formuleringen 'alla mängder' på ett otillåtet sätt blandar ihop mängder av olika typ. Russell menar också att hela anledningen till att en mängd inte kan vara medlem i sig själv är att en mängd och dess extension befinner sig på olika nivåer i typhierarkin.

Det finns ett antal av invändningar som kan resas mot Russells resonemang. Dessa kan uttryckas med följande liknelse: Vi tänker oss att Russell med sin paradox har upptäckt en sjukdom. Denna sjukdom består av orsaker och symptom. Vi frågar oss nu:

1. Vilken diagnos ställer Russell?

2. Vilken behandling ordinerar han?

Svaret på 1. är analogt med svaret på fråga X: Russells diagnos är att man inte tar sin medicin, dvs sjukdomens orsak är att man inte tar sin medicin. Men eftersom behovet att ta medicin är orsakat av samma sak som behovet av att ställa fråga X så måste vi konstatera att Russell inte förklarar någonting i citatet ovan. Svaret i citatet ovan är cirkulärt i det att Russells typer inte kan vara en orsak till paradoxen utan är en följd av något annat lika mycket som paradoxen själv är det. På fråga 2. ordinerar Russell just typteorin som medicin. Emellertid är det fel medicin i och med att orsaken inte är identifierad. Visserligen hjälper medicinen, men den lindrar bara symptomen och har inget med den egentliga orsaken att göra.

Russells uppsats heter *Mathematical Logic as Based on the Theory of Types*. Russell gör alltså anspråk på typteorin som något grundläggande som dels speglar orsaken till paradoxen, dels något som kan bilda grund för en mer allmän karaktäristik av logiken i stort. De svårigheter med detta synsätt som ovanstående liknelse velat uppmärksamma kan accentueras med följande fråga:

Vad, enligt typteorin, är det som gör att ett brott mot den genererar en motsägelse?

Denna fråga är helt och hållet obesvarad av Russell.

Hur är detta resonemang möjligt? För att förstå hur Russell kan betrakta brott mot typteorin som en förklaring på paradoxen måste vi studera hans resonemang i *Logic and Knowledge*. Russells problem kan spåras tillbaka till sid 64 (avsnitt II) och framåt där han utvecklar distinktionen mellan 'all' och 'any' i generella utsagor:

> ...when *any* value of a propositional function is asserted, the argument...is called a *real* variable; whereas, when a function is said to be *always* true, or to be not always true, the argument is called an *apparent* variable. [sid 65]

Om vi applicerar detta på den mängdteoretiska paradoxen innebär detta att t ex i ett hävdande i vilket uttrycket 'mängden av alla mängder' ingår så är variabeln 'mängd' vad

Russell kallar en 'apparent variable', vilket vi hädanefter kallar en skenbar variabel. Detta pga att uttrycket 'mängden av alla mängder' innehåller ordet *alla*. När ett påstående innehåller ordet *alla* kan situationen uppstå att den generella termen (variabeln) i fråga inte 'håller sig till' en typ. Detta sker närmare bestämt när extensionen av kollektionen av argument för vilka en påståendefunktion har värden utgör en äkta delmängd av extensionen av den kollektion över vilken den generella termen i ett uttryck som innehåller påståendefunktionen kvantifierar (*Mathematical Logic as Based on the Theory of Types* sid 75). Ett enklare sätt att säga samma sak är att den generella termen i fråga (dvs variabeln) kvantifierar över olika typer. M.a.o.: I uttrycket 'mängden av alla mängder' är den generella termen 'mängd' en skenbar variabel eftersom uttrycket refererar till *alla* mängder (enligt Russells definition sid 65). Dessutom: eftersom det som 'mängd' refererar till kan omfatta entiteter av olika typ refererar alltså 'mängd' i det aktuella exemplet till instanser av olika typ. Denna skenbara variabel kan både anta värdet 'mängden av skor' och värdet 'mängden av mängder', vilket är entiteter som befinner sig på olika nivåer i typhierarkin. Russell fastslår (sid 77) att ordet *alla* bara får användas i påståenden vilka innehåller variabel som håller sig till en typ. Påståenden som innehåller exempelvis variabeln 'mängd' kan inte innehålla ordet *alla* i anslutning till variabeln, för i så fall utökar vi den totalitet vi opererar på, vilket leder till motsägelser.

En äkta variabel är en variabel som inte utökar den totalitet vi opererar på. Om vi säger 'någon, vilken som helst (any) mängd', så är 'mängd' här en äkta variabel och därmed något oproblematiskt (*Mathematical Logic as Based on the Theory of Types* sid 67-68).

Russell menar alltså att om man talar om *alla* mängder så är 'mängd' en skenbar variabel som dessutom kan referera till objekt av olika typer och paradoxen uppstår för att vi behandlar den som en äkta. Vi måste iaktta typteorin som säger att det i uttrycket 'mängden av alla mängder som inte ingår i sig själva' förekommer två olika typer av mängd. Vi måste också iaktta distinktionen mellan äkta och vad som är skenbara variabler. Russell menar att denna distinktion sammanfaller med distinktionen av vårt bruk av 'all' respektive 'any'. Vi får bara använda 'alla' när variabeln håller sig till en typ. När vi talar om *alla* mängder innefattar detta även mängder av högre ordning. Russell menar att det beaktande av typteorin som är ett måste för att undgå paradoxer innebär att vi inte kan prata om *alla* mängder. För om vi gör det refererar vi ofrånkomligen till en slags totalitet som kan uttryckas med en variabel som varierar över flera typer och det är ju detta som enligt Russell (se citat 3) leder till motsägelser. Detta är i komprimerad form kontentan av Russells syn på paradoxer av den här typen, deras orsaker och hur man ska komma tillrätta med dem.

Emellertid är Russells distinktion mellan äkta och skenbara variabler vilseledande och leder till felaktiga slutsatser. De slutsatser han drar är de vi redan sett i citat 3, nämligen:

> And if we ask: 'But how about the class of all classes? Is not that a class, and so a member of itself?', the answer is twofold. First, if 'the class of all classes' means 'the class of all classes of whatever type', then there is no such notion. Secondly, if 'the class of all classes' means 'the class of all classes of type t', then this is a class of the next type above t, and is *therefore* again not a member of itself. (min kursivering).

Dessa två svar av Russell visar att han pga sin distinktion gått i fel riktning. På vilket vis då? Man kan säga att Russell inte klargör skillnaden mellan två typer av variation. I formell logik åtföljs en variabel alltid av en domän över vilken den kan variera, dvs man pratar inte om variabler utan att också precisera en domän. Preciseras ingen domän antar man att variabeln varierar över den universella domänen, men då får naturligtvis aldrig detta motsägas av annan karaktäristik som tillskrivits det variabeln symboliserar. Nu är emellertid Russells skenbara variabel en variabel som varierar över olika instanser, men inte i en, utan i två eller flera domäner. Domänerna här är naturligtvis Russells typer. Men något sådant som en variabel som kan variera dels över olika instanser i en domän dels byta domän finns per definition inte inom logiken, eftersom det i sådana fall är meningslöst att prata om olika domäner. Det som gjorde de olika domänerna olika har s.a.s. trollats bort. Domän och variabel är två sidor av samma mynt. Nej, i sådana fall är *det inte fråga om en skenbar variabel, utan om två äkta*. Men mot denna iakttagelse kanske man vill göra invändningen att Russell ju pratar om *skenbar* variabel, därmed implicerande att det inte är en variabel som varierar över mer än en domän så som här ovan sagts, utan något annat. Emellertid faller denna invändning. Alla tolkningar av vad som kan tänkas menas med 'skenbar' är överflödiga, eftersom Russells substitution av x till w i citat 1 tydligt visar att han hanterar den skenbara variabeln just som en variabel som varierar över olika domäner.

Vi ska nu försöka förklara denna iakttagelse. För att göra det för vi över resonemanget till mängdteori. Vi får då resultatet att hävdandet av utsagan 'mängden av alla mängder' inte består av en skenbar variabel utan av två äkta, nämligen 'mängden$_1$ av alla mängder$_2$' och dessa kan aldrig anta samma värde eftersom de varierar inom olika domäner, dvs inom varsin domän. Den direkta orsaken till Russells paradox är alltså helt enkelt att vi använder ett ord när vi borde använda två, eftersom vi menar två olika saker. Men varför blir det så? Varför använder vi ett ord och inte två när vi nu borde det? Därför att det i vårt naturliga språk är ovanligt att diskutera mängden av alla mängder. Språket är inte rustat för det i de flesta fall när sådan diskussion kommer upp. Att märka är dock att när mängdteoretiska situationer faktiskt dyker upp i vanliga språkliga situationer så *har* vi olika variabler för olika domäner. Ta följande exempel: 'I Saltängens skola finns låg- och mellanstadium med 25 elever i varje klass.' Här har vi fyra olika domäner (med fyra olika variabler); elev, klass, stadium och skola. Ingen skulle komma på idén att säga: 'I klass 3 går Kalle, mellanstadiet och Saltängens skola'.

Med påståendet att Russell inte klargör skillnaden mellan olika typer av variation menas med andra ord att det är en slags variation att en variabel varierar, en annan slags variation att byta variabel. Visserligen är det just denna distinktion som Russell tangerar med sin typteori, men han löper inte linan ut. Han menar att det finns något sådant som variabler som varierar över olika domäner och att man måste passa sig så att man inte allkvantifierar när man använder dessa. Men detta är att gå i fel riktning. Man måste klargöra skillnaden i variationsart. När det är gjort inser man att det Russell kallar en skenbar variabel i själva verket kan vara två (eller flera) äkta som varierar över olika domäner. Detta säger aldrig Russell. Vi får aldrig klart för oss att ordet 'mängd' har två helt skilda betydelser i paradoxen och att paradoxen orsakas av att vi inte uppmärksammar detta, utan Russell letar efter orsaken till paradoxen i vårt användande av ordet 'alla'. Felet vi gör som gör att frågan om huruvida mängden av alla mängder ingår i sig själv kan uppkomma är inte att vi pratar om *alla* mängder utan att vi pratar om alla *mängder*. Sålunda är Russells distinktion mellan skenbara och äkta variabler felaktig. Den leder till slutsatsen att det är fel att använda allkvantifikation på variabler som varierar över flera domäner, när den riktiga slutsatsen är att eftersom en variabel per definition inte kan ha mer än en domän (även om vissa accidentella fenomen i vårt symbolspråk kan lura oss att tro detta) så ligger felet därmed inte i *att* vi allkvantifierar utan i *vad* vi allkvantifierar över.

Ett annat sätt att betrakta problemet: Den kvalitativa skillnaden mellan mängden av mängder och mängden av bilar är exakt likadan och lika stor som mellan mängden av bilar och en viss bil. Formellt finns ingen skillnad mellan satsen 'mängden av mängder' och satsen 'mängden av bilar'. Båda handlar om en mängd och dess extension. Den skillnad som finns är att vi tenderar till att blanda ihop mängd och extension i den första satsen pga av att det tecken som symboliserar mängd och det tecken som symboliserar extension råkar likna varandra. Vi tenderar alltså att tillskriva dessa två satser en inbördes formell skillnad som inte finns. (Vi skulle ju aldrig påstå att mängden av alla bilar själv är en bil, men det är alltså inte mer onaturligt att säga det än att säga att mängder kan ingå i sig själva; om mängder kan ingå i sig själva borde bilar kunna göra det också). Vi bör alltså se till att dess tecken inte liknar varandra, se till att vår symbolik speglar båda skillnaderna lika mycket (dvs å ena sidan skillnaden mellan mängden av mängder och dess extension, å andra sidan skillnaden mellan mängden av bilar och dess extension). Och det är just här vi kan se Russells misstag: Han pekar inte på något problem i symboliken i de fall paradoxer uppstår; han pekar på problem i generaliseringen. Detta gör att han aldrig kan svara på fråga X. Om vi t ex pratar om mängden av alla bilar (dvs mängden av alla entiteter med egenskapen *F* på nivå *t* i typhierarkin), så följer det av Russells citat 3 att han menar att hela skälet till att denna mängd inte kan ingå i sig själv är att mängd och extension är av olika typ. Det förefaller ju onaturligt att påstå något sådant när vi pratar om mängden av bilar, men det är en följd av vad Russell påstår gäller för en mängd och dess extension när extensionen består av mängder; detsamma måste ju gälla för alla mängder och deras extensioner oavsett vad extensionen består av.

Men vad borde man i stället svara på fråga X? Inget i det ovan sagda förklarar för oss *varför* det faktiskt handlar om två olika slags variation. Varför är det *två* domäner som Russells skenbara variabel varierar över? Exakt varför får vi inte blanda ihop mängd och extension? Vad hos mängd respektive extension är det som gör att det uppstår en paradox när vi blandar ihop dem? Vi snuddade vid detta när vi talade om vad som är essentiellt för en domän. Vi återkommer till detta i avsnitt 5.

Det tog inte lång tid innan reaktionen kom på Russells oklara distinktion mellan *variation av* respektive *variation mellan* variabler. Det var Russells egen elev Wittgenstein som stod för reaktionen.

4. Wittgenstein

Det första skriftliga tecknet på Wittgensteins reaktion mot Russells typteori är från 1913 (se ovan sid 2). Det är dock hans redovisning av problemet i *Tractatus* (1921) vi ska studera här. Hans behandling av Russells paradox löser samtliga ovanstående problem utom det sistnämnda. Han talar aldrig om explicit vad exakt som är motsägelsen i citat 1, och levererar sålunda heller inget svar på fråga X. Han försöker inte heller göra detta, kanske för att han ansåg det självklart. Men han förklarar varför Russells typteori är överflödig.

Wittgensteins resonemang är som sagt kortfattat utfört och kan kanske te sig dunkelt. Emellertid förstår vi det när vi betraktar det mot bakgrund av ovanstående kritik av Russell. Wittgensteins lösning sammanfaller med kritiken av Russell, och går ut på just att reda ut symboliken så att 'mängden av alla mängder' i vårt exempel kallas för något annat än 'mängd', just för att hindra den sammanblandning av mängden av alla mängder och dess extension som är den omedelbara orsaken till paradoxen. Wittgenstein blir bönhörd i fråga om sin önskan av hur symboliken bör se ut i vårt exempel om Saltängens skola. Varje domän har sin egen variabel. Ingen variabel kan variera över mer än en domän (hur skulle den kunna det?; det vore ett brott mot definitionen av variabel och domän liksom mot den relation mellan variabel och domän som följer av definitionerna).

Wittgensteins lösning av paradoxen syns explicit i *Tractatus* 3.333:

> 3.333 En funktion kan icke vara sitt eget argument av det skälet, att funktionstecknet redan innehåller en urbild av argumentet och icke kan innehålla sig självt. Låt oss nämligen anta, att funktionen *F(fx)* kunde vara sitt eget argument. I så fall funnes det alltså en sats: "*F(F(fx))*" och i denna måste den yttre funktionen *F* och den inre funktionen *F* ha skilda betydelser, ty den inre har formen *φ(fx)*, den yttre formen *ψ(φ(fx))*. Gemensamt för de bägge funktionerna är endast bokstaven *F*, som emellertid i och för sig icke betecknar någonting.
> Detta blir genast klart, om vi i stället för "*F(F(fu))*" skriver "*(∃φ):F(φu).φu=Fu*". Härmed försvinner Russells paradox.

Wittgenstein markerar här att den kvalitativa skillnaden mellan det inre och yttre F i uttrycket F(F(x)) genom att döpa om dem till ψ respektive φ. Denna åtgärd gör att det syns att varje variabel har sin egen domän; det syns att två sidor av samma mynt inte är detsamma som två sidor av olika mynt.

5. Den dolda motsägelsen

Varken Russell eller Wittgenstein meddelar explicit vad det är som genererar motsägelsen. Inför de svar de levererar kan vi alltid fråga: Ja, men varför är det *så*? I Russells fall kan vi mera exakt fråga: Vad är det som gör att ett brott mot typteorin orsakar en motsägelse? Och när Wittgenstein i *Tractatus* säger:

> 3.333 En funktion kan icke vara sitt eget argument av det skälet, att funktionstecknet redan innehåller en urbild av argumentet och icke kan innehålla sig självt...

är det inte säkert att det är lika klart för oss som för Wittgenstein varför det skäl han åberopar faktiskt är ett skäl. Vi måste dra fram den dolda motsägelsen i ljuset. Först när vi gjort detta kan vi säga att vi bevisat vad det är som orsakat paradoxen. Beviset består i att exponera motsägelsen.

Anledningen till att motsägelsen är dold är att den består i en viss inkonsekvens i fråga om vissa dolda premisser i vår slutledningskedja. Dessa dolda premisser rör vad vi faktiskt hävdar i kraft av *väsensdrag* hos begreppen mängd och extension i all diskussion om dessa. Motsägelsen uppträder sedan vi i vår slutledning först implicit infört vissa definitioner i form av väsensdrag hos begrepp som explicit införts. Därefter införs en premiss som pga av en språklig illusion ter sig riktig för oss, men som i själva verket inte är kompatibel med de tidigare implicit införda definitionerna. Vi märker inte detta direkt, och det är detta som är den dolda motsägelsen. Under vissa omständigheter (vid införandet av vissa ytterligare premisser) kan sedan en synlig motsägelse uppträda. Detta är paradoxen.

Det finns tre sätt att behandla situationen. Det ena är att förbjuda samtliga fall som leder till motsägelse (Russell). Det andra är att avlägsna den språkliga illusionen så att vi inte *kan* införa några premisser som inte är kompatibla med de i slutledningen ingående begreppens väsensdrag (Wittgenstein). Sätt nummer ett är oacceptabelt eftersom det inte skänker oss motsägelsefrihet (det gör bara att vi slipper se några konsekvenser av den alltjämt föreliggande dolda motsägelsen). Sätt nummer två är att föredra eftersom den direkta orsaken till paradoxen blir undanröjd. Problemet upphör att vara ett problem. Men hur kan vi veta säkert *när* vi undviker den språkliga illusionen och *att* vi har ett korrekt språk (när så är fallet)? Det är otillfredsställande att inte veta vad det var som gjorde problemet till ett problem. Därför behöver vi ett tredje sätt att bete oss, nämligen att bringa i dagen exakt vari den dolda motsägelsen i fråga om Russells paradox består. När detta är gjort är vi i besittning av ett instrument att bruka då vi behöver förklara en mängdteoretisk paradox av det slaget som Russells paradox.

Begreppet mängd och begreppet extension är nära besläktade, för att inte säga direkt förknippade med varandra. De är två sidor av samma mynt, analogt med det sätt på vilket variabel och domän är två sidor av samma mynt. I själva verket är mängd och extension ett fall av referens till det språkliga begreppsparet variabel och domän. Variabel och domän är den universella uttrycksformen för en viss relation, och mängd-extension är ett fall av denna relation. Det är väsentligt för en variabel att variera över en domän och det är väsentligt för en domän att det finns en variabel. Vi kan inte tänka oss det ena utan det andra. Visserligen kan vi t ex tänka oss några objekt, men i och med att vi behandlar dem (eller snarare deras namn), generellt för vi in dem under ett tak. När detta sätt att operera verkställs uppstår en ny situation som dels innebär ett vi får en ny entitet, variabeln, dels att vi nu betraktar de namn vi opererar på som något mer än ställföreträdare för några objekt; de är instanser i en domän. Så som vi definierar dessa teoretiska entiteter är det väsentligt för dem att de förutsätter varandra. De förutsätter därmed också ytterligare något, nämligen vissa relationer mellan variabel och domän, eller mellan mängd och extension som jag föredrar att prata om fortsättningsvis. I det att vi för in begreppet mängd i ett resonemang för vi också in begreppet extension och de relationer som råder mellan mängd och extension, (eller mellan mängden och dess element). Vilken är då relationen som råder mellan mängden och elementet? Det är en helhet-delrelation, dvs en irreflexiv och asymmetrisk relation.

1. Begreppen mängd och element definieras i termer av varandra (dvs. förutsätter varandra). Införandet av begreppet mängd i ett argument innebär a priori införandet av såväl element som en relation mellan mängd och element (även om detta andra införande kan vara implicit).

2. Relationen mellan mängd och element är asymmetrisk och därmed inte reflexiv. Om en relation är reflexiv så kan den inte vara asymmetrisk.

1. och 2. förutsätts gälla utan någon mer detaljerad redovisning.

Låt oss nu betrakta följande sats:

"Mängden av alla mängder som inte är medlemmar i sig själv".

En mängds extension kan inte omfatta mängden själv eftersom det skulle innebära hävdandet av en relation som är både asymmetrisk och reflexiv; allting står i en reflexiv relation till sig själv, samtidigt som en mängd per definition står i en asymmetrisk relation till sin extension. M.a.o; skulle detta (från 2 ovan) innebära att en relation både är asymmetrisk och icke asymmetrisk. Motsägelse. Men i ovanstående sats pratas ju om mängder som *inte* är medlemmar i sig själva. Varför leder det till motsägelse? Det beror på att satsen ifråga (när den uppfattas paradoxalt) visserligen säger 'mängder som inte är medlemmar i sig själva', men istället gör anspråk på att mängden av dessa mängder är medlem i sig själv, i egenskap av att (skenbart) omfattas av generaliseringen 'alla mängder som inte är medlemmar i sig själv' och därmed ingå i sin egen extension.

Det hela kan också uttryckas på annat sätt: Vi börjar med att titta på extensionen av mängden av alla mängder som inte ingår i sig själv. 'Alla mängder som inte är medlemmar i sig själva' kan, med avseende på relationer, omformuleras till:

3. 'Alla instantieringar av asymmetriska relationer som inte är reflexiva'.

Dessa instantieringar symboliserar vi med variabeln R. Nu frågar vi: Är relationen mellan mängden av alla mängder som inte ingår i sig själva och en instans av dess extension en instantiering av R? Det kan det inte vara enligt ovanstående. Det skulle förutsätta att en mängd kunde ingå i sig själv vilket ju konstaterats vara per definition omöjligt. Alltså måste vi för att undvika ovanstående motsägelse låta en annan variabel symbolisera relationen mellan mängden av alla mängder som inte ingår i sig själva och dess extension, t ex Q. Ingen instantiering av Q kan alltså vara en instantiering av R och vice versa. Detta kan formuleras:

4. $R(x,y) \Leftrightarrow \neg Q(x,y)$

Nu tittar vi åter på citat 1:

> Let *w* be the class of all those classes which are not members of themselves. Then, whatever class *x* may be, '*x* is a *w*' is equivalent to '*x* is not an *x*'. Hence, giving to *x* the value *w*, '*w* is a *w*' is equivalent to '*w* is not a *w*'.

Att ge *x* värdet *w* är detsamma som att säga

5. $R(x,y) \leftrightarrow Q(x,y)$

Detta tillsammans med 4. leder till motsägelse.

Vi kan formulera det på ytterligare ett annat sätt: Betrakta 3. ovan. Russells paradox uppstår när vi först tittar på denna sats och låter R symbolisera dessa instantieringar, och sedan frågar oss varför generaliseringen inte satisfieras då vi har en instantiering Q av en asymmetrisk relation. I stället för att dra slutsatsen att anledningen till att generaliseringen inte satisfieras är att instantieringen i fråga faller utanför den domän generaliseringen gäller (dvs utanför den domän R varierar över) utgår vi från att den omfattas av generaliseringen och drar därför i stället slutsatsen att den asymmetriska relationen i fråga hör till gruppen asymmetriska relationer som är reflexiva, och motsägelsen är ett faktum.

När vi talar om mängder och mängder av mängder så fastställer vi ett antal saker implicit. Dessa implicita fastställanden är direkta följder av de allmänt accepterade definitionerna av de införda termerna. Av fastställandena i fråga följer sedan ytterligare fastställanden, nämligen fastställanden av domäner för de variabler som förekommer i de i argumentet ingående generaliseringarna. Den dolda motsägelsen i Russells paradox är en motsägelse vi gör oss skyldiga till med avseende på dessa domäner och deras variabler. Vi definierar helt enkelt, utan att veta om det, termen 'mängd' på två olika och inkompatibla sätt med avseende på relationen mellan mängd och extension. Denna motsägelse leder sedan till ytterligare en. Denna andra motsägelse är explicit, men vi kan inte omedelbart se dess orsaker. Därför pratar vi om en paradox.

6. Sammanfattning

Bertrand Russells lösning av paradoxen bygger på typteorin. Denna teori är i sig inte felaktig; den visar oss hur vi kan slippa det som är paradoxalt. Den anger också de riktiga domänerna för variabler av olika ordning. Den talar också om för oss att vi måste hålla isär dessa domäner. Problemet med Russells lösning är att den inte talar om *varför* variabler är av olika ordning. *Att* de är det är ett axiom för Russell. Men det finns en bakomliggande orsak, nämligen att variabler är av olika ordning som ett resultat av vissa i resonemanget införda definitioner, redan accepterade föreställningar om hur de begrepp variablerna är uttryck för är relaterade till varandra. Dessa definitioner är det som gör att vi kan tala om en typteori, och det är inkoherens mellan dessa definitioner som orsakar paradoxen. Russell går i fel riktning; han angriper själva kvantifieringen i stället för att fråga *vad* vi kvantifierar över, och detta leder till att hans lösning riktar sig mot symptomen snarare än orsaken. Låt oss återigen titta på citat 3:

> And if we ask: 'But how about the class of all classes? Is not that a class, and so a member of itself?', the answer is twofold. First, if 'the class of all classes' means 'the class of all classes of whatever type', then there is no such notion. Secondly, if 'the class of all classes' means 'the class of all classes of type t', then this is a class of the next type above t, and is *therefore* again not a member of itself. (min kursivering).

Russells 'therefore' i sista meningen är just det som kan ifrågasättas. Russell gör anspråk på att typtillhörigheten är förklaringen till paradoxen, och lyckas därmed inte förklara varför en entitet hör till en typ och vad en typskillnad ytterst består av. Och när han säger 'there is no such notion' (syftande på en mängd vars extension utgörs av mängder av olika typ) så har han visserligen rätt, men det är inte tillräckligt att säga detta. Man måste också säga att inte nog med att mängder av olika typ inte kan bilda en mängd; två mängder av olika typ är *olika varandra* på ett sätt som är orsakat av vårt implicita hänvisande till relationen helhet-del i samband med definierandet av termen 'mängd' och som pga denna olikhet inte kan bilda en mängd (och därmed 'jämställas' i egenskap att vara element) utan att motsäga det vi redan antagit då vi definierat mängdbegreppet som en helhet-delrelation. Ingenting kan stå i en helhet-delrelation till sig själv. Och även om vi har en mängd som består av ett enda element, och därmed detta element står i en helhet-delrelation till mängden av detta element, så är detta *inte* samma sak som att säga att mängden (eller elementet) står i en helhet-delrelation till sig själv. Sålunda är skälet till att 'there is no such notion' samma skäl som gör att det är missvisande att benämna mängder av olika typ med samma term. M.a.o.: Inte nog med att det inte finns något sådant som 'mängden av alla mängder av alla typer', utan dessutom: 'Alla mängder av alla typer' kan inte alla restriktionslöst benämnas och betraktas som 'mängder'. Samma skäl som får Russell att säga 'there is no such notion' förpliktigar honom också att göra något han inte gör; klargöra att mängden av mängder är något väsensskilt från en instans av sin extension.

Wittgensteins lösning går djupare. När han säger att Russells misstag består i att han måste tala om tecknens betydelse är det samma sak som att Russells misstag består i att inte löpa linan ut och titta på det som är bakomliggande, det som inte är accidentellt. Nämligen definitionerna. Det är när vårt språk inte är i fas med sina egna definitioner som vi drabbas av paradoxer. Termen mängd har i detta fall två olika inkompatibla definitioner. Det innebär att felet är att språket inte speglar det faktum att vi laborerar med två väsensskilda begrepp, varvid vi blandar ihop dessa begrepp med en motsägelse som följd. Emellertid säger inte Wittgenstein allt detta explicit. Han säger bara *vad* som är fel, inte *varför* det är fel. Hans förklaring behöver i sin tur ytterligare förklaring. I avsnitt 4 har vi därför studerat de bakomliggande definitionerna i fallet Russells paradox för att bevisa att Wittgenstein hade rätt. Utifrån vissa grundläggande antaganden ifråga om inkompabiliteten hos vissa typer av relationer har vi sett omöjligheten i att en mängd skulle kunna ingå i sig själv, och varför detta är omöjligt, även om vår symbolik tyder på att det möjligt. Dessa iakttagelser stöder det

Wittgenstein sagt om paradoxen, och kan betraktas som en utveckling av det han sagt i *Tractatus*.

Inledningsvis berörde vi Cantors definition av vad som är en mängd. Ovanstående iakttagelser rörande mängdteoretiska paradoxer innebär (som man snart insåg) att vi måste införa vissa restriktioner i samband med denna definition. Vad som helst kan uppenbarligen inte bilda mängder restriktionslöst. Om vill bilda konstellationer av entiteter av olika ordning (vilket är väsensskilt och mer abstrakt än det Cantor tänkte sig med en mängd) måste dessa konstellationer vara och alltså kallas för något annat än mängder. Russells behandling av problemet grundar sig dock på en ambition att ändra så lite som möjligt av Cantors mängdbegrepp. Den klassiska matematiken vilade ju på detta. Man kan säga att Russell valde att lägga en viss tonvikt på att införa restriktioner dels naturligtvis i fråga om *vad* som kan bilda en mängd, men också i fråga om *hur vi använder* mängder. Typteorin är ett slags regelverk som reglerar vårt användande av mängder eller variabler. Wittgenstein å andra sidan ville inte ha några restriktioner i fråga om användandet av variabler, utan ville se problemet löst redan på den syntaktiska nivån. Och detta innebär i fråga om mängder att de restriktioner som måste tillämpas på Cantors mängdbegrepp enbart rör frågan om *vad* som meningsfullt kan sägas bilda mängder, dvs vad som är en mängd.

Det är emellertid en aning missvisande att använda ordet 'restriktion' här. Det är missvisande av samma skäl som Russells typteori är det. Användandet av ordet 'restriktion' döljer orsaken till paradoxen. Det är som om vi först i strid med våra egna implicita definitioner och alltså felaktigt betraktar entiteter av olika ordning som mer lika varandra än de egentligen är (lurade därtill av accidentella egenskaper hos vår egen symbolik), och därefter inför 'restriktioner' som ska reda ut resultatet av våra misstag i stället för att angripa den verkliga orsaken. Vi inför restriktioner inom ett område pga att vi tidigare tagit oss för stora friheter. Vi svarar inte på frågan *varför* och *i vilket avseende* vi tog oss för stora friheter. Vi medicinerar symptomen och inte orsaken.

7. Slutsatser

Slutligen ska vi se om de resultat vi uppnått i denna uppsats kan leda till några mer generella iakttagelser eller slutsatser om vårt språks logik. I samband med detta ska vi ett ögonblick vidga vårt fokus på de tekniska frågorna kring paradoxen och säga något om det filosofiska sammanhang i vilket frågorna kring de logiska paradoxerna behandlades. För vi kan tycka att det är underligt att en filosof och matematiker som Russell, vars resultat bevisligen haft mycket stort inflytande på vårt sekels filosofi, tycks leverera en så primitiv lösning av frågan, och det är av stor vikt för vår egen förståelse av problemet att vi kan få klarhet i hur detta kan komma sig.

Russell tillsammans med Moore bildade kring sekelskiftet en spjutspets inom projektet att bemöta idealism och psykologism i alla former. Russell utgick redan från början från en uttalad realism som bland annat präglades av en mycket substantiell syn på allt som utgjorde språklig referens. Russell hade en stark vilja att sortera in allt som de språkliga entiteterna refererade till under begreppet objekt. Såväl partikulära objekt som universalier och logiska 'entiteter' mm var objekt för honom. En mängd var också ett objekt. Även icke-existerande entiteter betraktades av Russell som existerande i någon bemärkelse, för annars kunde vi inte prata om dem. Den bakomliggande ambitionen var att undersöka huruvida en sådan enkel eller 'likriktad' ontologi kunde bilda grunden för en förklaring av grundläggande kunskapsteoretiska frågor. Det är i detta större perspektiv vi måste betrakta Russells behandling av paradoxen.

De undersökningar Russell utförde utifrån denna uttalat realistiska utgångspunkt stötte på olika svårigheter, och Russell modifierade sina teorier upprepade gånger. Sakta men säkert tonade han ner den uttalade realismen under tiden mellan sekelskiftet och 20-talet.

Oavsett hur en Russellsk definition av ett objekt skulle se ut vid den tid då *Mathematical Knowledge as Based on the Theory of Types* skrevs så kan vi efter våra iakttagelser i fråga om paradoxen konstatera att det verkar som om den 'statuslikriktning' en uttalad realism leder till innebär en risk för svårigheter att blottlägga implicita definitioner. Man tenderar därmed att missa vissa väsensdrag hos olika entiteter. Man slutar att fråga efter orsaker till saker och ting när man lyckats karaktärisera dem i termer av objekt eller verkligt existerande entiteter som är oberoende av medvetandet etc. Russells utgångspunkt att om man kan prata om något så finns detta i yttervärlden oberoende av vårt medvetande tycks leda till att exempelvis 'mängd' i alla lägen ska behandlas som ett föremål vilket som helst, låt vara av olika typ. Väsensskillnaden mellan en individ och en mängd respektive mellan en mängd av första och en mängd av andra ordningen suddas ut. Den uttalade realismen suddar ut de gränser mellan domänerna som vi själva redan, ehuru implicit, fastlagt.

En annan iakttagelse som rör något som är relaterat till den status objekt som mängder åtnjuter kan också nämnas. Wittgensteins behandling av paradoxen visar att problemet inte är semantiskt, som Russell trodde, utan rent syntaktiskt. Problemet är inte att det föreligger en diskrepans mellan de språkliga entiteternas sätt att bete sig och det sätt på vilket något i världen (något som är oberoende av vårt medvetande) beter sig. Diskrepansen föreligger mellan något som *vi sagt* (låt vara implicit) gäller för vissa entiteter och något annat som är inkompatibelt med detta som *vi senare hävdar* gäller för samma entiteter. När Wittgenstein skriver 'så snart vi blott vet hur varje tecken betecknar' menar han just 'när vi en gång definierat det sätt på vilket tecknen betecknar' och när han säger att 'den logiska syntaxens regler måste ge sig själva' menar han att vi måste låta det vi först sagt gälla; vi har redan en gång sagt vad som ska gälla. Vi måste ha en motsägelsefri syntax:

> 3.334 Den logiska syntaxens regler måste ge sig av sig själva så snart man blott vet hur varje tecken betecknar.

Det torde vara en av de mera svårhanterliga konsekvenserna av den uttalade realismen att likställandet av alla språkets referenter såsom 'av medvetandet oberoende objekt' medför att vi söker svara på frågor som Russells paradox genom att utföra diverse operationer (som införandet av typteorin) på entiteter som vi tror tillhör den yttre världen, när problemet i själva verket är orsakat av oss själva.

Tågordningen är följande: Vissa grundläggande föreställningar om det vi kallar skillnad mellan olika slags relationer, tillsammans med våra definitioner (explicita och implicita), anger entydigt villkoren för vad vi menar med uttryck som 'variabel' och 'domän'. Det är sedan meningen hos dessa uttryck som entydigt anger villkoren för kvantifikation.

Visserligen bottnar all sådan begreppslig reduktion i föreställningar som inte ytterligare kan förklaras, men detta är helt naturligt och i fas med vad vi i själva verket menar med en förklaring. En förklaring är detsamma som en omstrukturering av en given informationsmängd, inte en process som genererar ny information. Vad som *inte* är naturligt är när vi, i tron att vi ägnar oss åt förklaring, i själva verket deformerar informationens faktiska innehåll. Det är detta som sker när vi i något vi gör anspråk på ska vara motsägelsefritt inför information som inte är kompatibel med redan befintlig information. När så sker syns detta ibland i form av en paradox, och i dessa fall förstår vi att vi gjort något felaktigt. Tyvärr torde dock det stora flertalet av sådana fall inte leda till någon uppenbar paradox utan bara till vanlig förvirring.

Vad vi har att göra är alltså att ge akt på att den information vi för in i de sammanhang vi kallar för logisk argumentation inte är behäftade med motsägelser visavi annan information som vi infört tidigare i logikens tågordning. Detta är det enda som är viktigt, och om detta konstaterande ter sig klart påvisat för läsaren är det fulla syftet med denna uppsats uppnått.

Litteratur

Gottlob Frege: *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. 1. Olms, Hildesheim, 1962

Bertrand Russell: *Mathematical Logic as Based on the Theory of Types* (1908), ur *Logic and Knowledge. Essays 1901-1950*, London, 1956

Ludwig Wittgenstein: *Tractatus Logico-Philosophicus* (1921), Thales, Stockholm (1962) 1992 (övers. Anders Wedberg)

Ludwig Wittgenstein: *Letters to Russell, Keynes and Moore*, G. H. von Wright, ed. Cornell University Press, Ithaca, N.Y., 1961